الجبر الخطي والهندسة التحليلية

المستوى الثاني تقانة

المحاضرة الثالثة

2-1-3 ضرب المصفوفات:

إذا كانت هناك مصفوفتان A, B فإنهما تكونان قابلتين للضرب إذا كان عدد الأعمدة في المصفوفة اليسرى A مساوياً لعدد الصفوف في المصفوفة اليمنى B . فعلى سبيل المثال، المصفوفتين A , B رتبتاهما (2 x2) , (3 x 2) على الترتيب وتتكون من:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

حاصل الضرب C = AB هو مصفوفة رتبتها (3 x 2) تعرف كالآتي:

$$C = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \\ a_{31}b_{11} + a_{32}b_{21} & a_{31}b_{12} + a_{32}b_{22} \end{pmatrix}$$

أي أن المصفوفة الناتجة لها عدد من الصفوف يساوى عدد صفوف المصفوفة الأولى A وعدد من الأعمدة يساوى عدد أعمدة المصفوفة الثانية B ويكون كل عنصر من عناصر المصفوفة C وليكن C_{ik} (أى الواقع في الصف رقم I والعمود رقم k) مساوياً لمجموع حواصل ضرب عناصر الصف رقم I في المصفوفة اليسرى A في عناصر العمود رقم k من المصفوفة اليمنى B فى نظيره.

مثال (3-3): إوجد حاصل ضرب المصفوفتين:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -2 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$$

<u>الحـــل</u>

$$C = A \times B$$

$$=\begin{pmatrix} 2\times 2+3\times 4+(-1\times 5) & 2\times 1+3\times -2+(-1\times -3) \\ 4\times 2+1\times 4+2\times 5 & 4\times 1+1\times -2+2\times -3 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 11 & -1 \\ 22 & -4 \end{pmatrix}$$

مثال (3-4): إذا أخذنا:

$$A_{(2\times3)} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad , \quad B_{(3\times2)} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

فإن المصفوفة A قابلة للضرب فى المصفوفة B ويعطى حاصل الضرب C = AB من:

$$C_{(2\times 2)} = \begin{pmatrix} 3\times 1+1\times 3+2\times 2 & 3\times 2+1\times 1+2\times 3 \\ 2\times 1+1\times 3+3\times 2 & 2\times 2+1\times 1+3\times 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 10 & 13 \\ 11 & 14 \end{pmatrix}$$

ومن جهة أخرى فإن المصفوفة B قابلة للضرب فى المصفوفة A ويعطى حاصل الضرب D = BA من:

$$D_{(3\times 3)} = \begin{pmatrix} 1\times 3+2\times 2 & 1\times 1+2\times 1 & 1\times 2+2\times 3 \\ 3\times 3+1\times 2 & 3\times 1+1\times 1 & 3\times 2+1\times 3 \\ 2\times 3+3\times 2 & 2\times 1+3\times 1 & 2\times 2+3\times 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 7 & 3 & 8 \\ 11 & 4 & 9 \\ 12 & 5 & 13 \end{pmatrix}$$

ومن هذا يتضح أن $AB \neq BA$ أي أن قانون التبادل لا يصلح للمصفوفات حتى لو كانت رتبة مصفوفة حاصل ضرب $A \times B$ تساوى رتبة مصفوفة حاصل ضرب $B \times A$.

وضرب المصفوفات له الخصائص التالية:

$$(1)\ A(B+C) = AB + AC$$
$$(2)\ (A+B)C = AC + BC$$
$$(3)\ A(BC) = AB(C)$$

وعموماً يمكن إثبات أن: $AB \neq BA\ ,\ ABC \neq BAC$

وإذا كانت $AB = AC$ فهذا لا يعنى أن $B = C$. وإذا كانت $AB = 0$ فلا يعنى هذا أن $B = 0$ أو $A = 0$

محدد المصفوفة: Determinant of the Matrix

لكل مصفوفة مربعة محددة خاصة بها ويرمز لها بالرمز $|A|$ او det(A) فمثلاً إذا كانت:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \therefore |A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -2$$

وتسمى المصفوفة المربعة التي محددتها تساوى صفراً بالمصفوفة الشاذة.

ويحقق محدد المصفوفة الخواص التالية:

إذا كان A , B مصفوفتان مربعتان وقابلتان للضرب فإن:

1) $$|AB| = |A|.|B|$$

$$|A_T| = |A| \qquad (2$$

$$|A^{-1}| = \frac{1}{|A|} \qquad (3$$

حيث A^{-1} هو مقلوب أو معكوس المصفوفة كما سيعرف فيما بعد.

$$|cA| = c^n.|A| \qquad (4$$

حيث c مقدار ثابت، cA هو المصفوفة الناتجة من ضرب كل عنصر من عناصر المصفوفة A في المقدار الثابت c كما يلي:

$$cA = \begin{pmatrix} ca_{11} & ca_{12} & \ldots\ldots & \ldots\ldots & ca_{1n} \\ ca_{21} & ca_{22} & \ldots\ldots & \ldots\ldots & ca_{2n} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ ca_{n1} & ca_{n2} & \ldots\ldots & \ldots\ldots & ca_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\therefore |cA| = c \times c \times c \ldots\ldots \times c.|A| = c^n.|A|$$